ΔΕΣΜΗ 1999

Έστω οι συναρτήσεις $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$

και $g(x)=\displaystyle\int_1^4 f(t)\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdot e^{t/x^2}\,dt$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να υπολογιστεί το $I=\displaystyle\int_1^4 f(t)\,dt$

β) ΝΔΟ $e^{1/x^2}\le e^{t/x^2}\le e^{4/x^2}$, $\forall t\in[1,4]$ και $x\in(0,+\infty)$

γ) Να υπολογιστεί το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ΛΥΣΗ

α) f συνεχής ως ρητή πολυωνυμική $\Rightarrow \exists \displaystyle\int_1^4 f(t)\,dt$

Επομένως, $I=\displaystyle\int_1^4 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$ θα υπάρχει

$$I=\int_1^4 \frac{2t+3}{t+2}\,dt=\int_1^4\frac{2(t+2)-1}{t+2}\,dt=\int_1^4\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt=$$

$$=\int_1^4 2\,dt-\int_1^4\frac{1}{t+2}\,dt=\left.2t\right|_1^4-\left.\log(t+2)\right|_1^4=$$

$$=8-2-\log 6+\log 3=6-(\log 6-\log 3)=6-\log 2$$

β) $\forall t\in[1,4]$ και $x\in(0,+\infty)\Rightarrow 1\le t\le 4\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{t}{x^2}\le\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{1/x^2}\le e^{t/x^2}\le e^{4/x^2}$. ①

γ) Στη $g(x)$ συναντάμε μεταβλητές x και t. Το t δεν μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο. Προφανώς, θα χρειαστούμε τις παραπάνω ανισοτικές σχέσεις. Η συνάρτηση $f(t)>0$ καθώς και η $\dfrac{x+2}{x+1}>0$

Άρα στην ① $\rightsquigarrow$ $\underbrace{f(t)\cdot\dfrac{x+2}{x+1}\cdot e^{1/x^2}\le f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{t/x^2}}\le f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{4/x^2}$

$f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{1/x^2}\le f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{t/x^2}\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(t)\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdot e^{t/x^2}\,dt \geq \int_1^4 f(t)\,\frac{x+2}{x+1}\cdot e^{1/x^2}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \geq \frac{x+2}{x+1}\, e^{1/x^2} \int_1^4 f(t)\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \geq \frac{x+2}{x+1}\, e^{1/x^2}(6-\log 2) \quad (2)$$

Και στην άλλη ανισοτική σχέση θα είναι ως εξής:

$$f(t)\,\frac{x+2}{x+1}\, e^{t/x^2} \leq f(t)\,\frac{x+2}{x+1}\cdot e^{4/t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(t)\cdot\frac{x+2}{x+1}\, e^{t/x^2}\,dt \leq \int_1^4 f(t)\,\frac{x+2}{x+1}\, e^{4/x^2}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \leq \frac{x+2}{x+1}\cdot e^{4/x^2}\int_1^4 f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \leq \frac{x+2}{x+1}\, e^{4/x^2}\cdot(6-\log 2) \quad (3)$$

Στις (2),(3) βλέπουμε ότι η g έχει φθάσει σε μια γενική σχέση μορφής: $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$

Επομένως,

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\, e^{1/x^2}\cdot(6-\log 2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}\cdot e^{1/x^2}\cdot(6-\log 2)\right) = 6-\log 2.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\, e^{4/x^2}(6-\log 2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}\, e^{4/x^2}(6-\log 2)\right) = 6-\log 2$$

Άρα, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 6-\log 2.$$